千古之谜与
几何、天文、物理两千年

项武义

2011年秋，南开大学

仰望夜空，繁星点点，斗转星移，其中除了称之谓

金、木、水、火、土

这么几个行星之外，其他的星座皆为恒星，犹如固定在一个天球之上，天天绕轴运行(这其实就是地球自转的视效应).

为什么会有这几个行星漫游于王道十二宫，各自行踪独特！这也就是古天文学的中心议题，堪称

千古之谜

仰望夜空，繁星点点，斗转星移，其中除了称之谓

金、木、水、火、土

这么几个行星之外，其他的星座皆为恒星，犹如固定在一个天球之上，天天绕轴运行(这其实就是地球自转的视效应).

为什么会有这几个行星漫游于王道十二宫，各自行踪独特！这也就是古天文学的中心议题，堪称

千古之谜

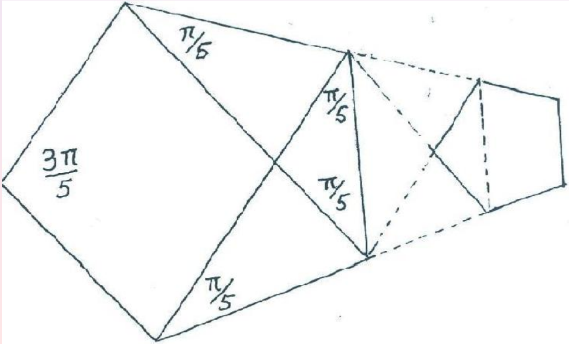
大致上由Pythagoras (6th C. BC) 到Newton (17世纪) 这两千多年，理性文明(Civilization of Rational Mind) 的主轴与重大进展在于几何，天文与物理；而上述千古之谜则是贯穿全局的核心议题，而其中

- 古希腊几何基础论
- Kepler：新天文学
- Newton：自然哲学的数学原理

则是三个伟大的里程碑；而且三者又各有其迷途、知返、突破与辉煌. 引人入胜，发人深思. 本讲将概述其精要，和同学作一次简洁的重访.

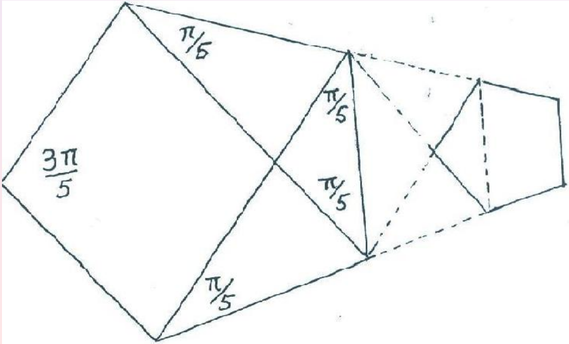
(一)几何基础论(Foundation of Geometry): 古天文学与几何学(Geometry & Astronomy of the Antiquity)

- Pythagoras的哲理性创造
  大自然具有精简，和谐的内在本质；而且可以经由数、比值和形状 (Numbers, Ration & Shapes)由表及里，探索其理.
- 毕氏学派的定量几何基础(初)论
- 几何巨震 (Geoquake)：Hippasus的伟大发现



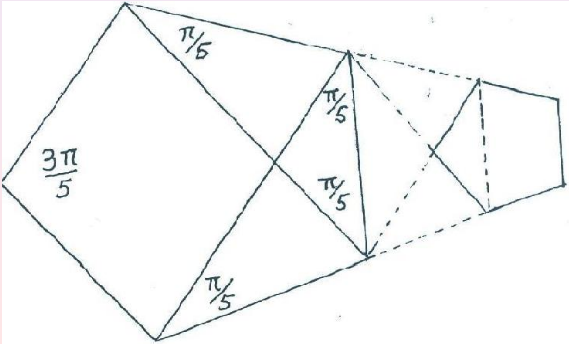
(一)几何基础论(Foundation of Geometry):
古天文学与几何学(Geometry & Astronomy of the Antiquity)

- Pythagoras的哲理性创造
  大自然具有精简，和谐的内在本质；而且可以经由数、比值和形状 (Numbers, Ration & Shapes)由表及里，探索其理.
- 毕氏学派的定量几何基础(初)论
- 几何巨震 (Geoquake)：Hippasus的伟大发现



(一)几何基础论(Foundation of Geometry):
古天文学与几何学(Geometry & Astronomy of the Antiquity)

- Pythagoras的哲理性创造
  大自然具有精简，和谐的内在本质；而且可以经由数、比值和形状 (Numbers, Ration & Shapes)由表及里，探索其理.
- 毕氏学派的定量几何基础(初)论
- 几何巨震 (Geoquake)：Hippasus的伟大发现



- Eudoxus 逼近论与基础论之重建

  1) 比较原则:

$$a:b\left\{\begin{array}{c}<\\>\end{array}\right\}\frac{m}{n}\Leftrightarrow n\cdot a\left\{\begin{array}{c}<\\>\end{array}\right\}m\cdot b$$

  2) 逼近定理:对于任意大的整数N,恒有m使得

$$\frac{m}{N}<a:b<\frac{m+1}{N}$$

  [Eudoxus 提出如今误称为Archimedes公设者,作为上述定理的论证依据.]

- Eudoxus 逼近论与基础论之重建

1) 比较原则:

$$a:b\left\{\begin{array}{c}<\\>\end{array}\right\}\frac{m}{n}\Leftrightarrow n\cdot a\left\{\begin{array}{c}<\\>\end{array}\right\}m\cdot b$$

2) 逼近定理：对于任意大的整数N，恒有m使得

$$\frac{m}{N}<a:b<\frac{m+1}{N}$$

[Eudoxus 提出如今误称为Archimedes公设者，作为上述定理的论证依据.]

3) 不可公度比a:b和c:d之间的大小或相等关系之明确界定:

(i) 设两者不相等，则其差是一个非零之定值，所以在N 足够大时，其差大于$1/N$. 因此，$c:d$不可能也夹逼于上述$\frac{m}{N}$和$\frac{m+1}{N}$ 之间，亦即有

$$c:d\left\{\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}\right\}\frac{a}{b} \Leftarrow \left\{\begin{matrix} c:d < \frac{m}{N} < a:b \\ c:d > \frac{m+1}{N} > a:b \end{matrix}\right.$$

(ii) 由此可见，两者相等的充要条件就是它们和所有比数(rational number)皆有相同的大小关系

4) 定量平面几何基础论之重建:
相似三角形定理之辅证
矩形面积公式之辅证

5) 空间连续性 (continuity) 的认知与分析学(Analysis)之奠基与启蒙

3) 不可公度比a:b和c:d之间的大小或相等关系之明确界定：

(i) 设两者不相等，则其差是一个非零之定值，所以在N 足够大时, 其差大于$1/N$. 因此, $c:d$不可能也夹逼于上述$\frac{m}{N}$和$\frac{m+1}{N}$ 之间，亦即有

$$c:d\left\{\begin{array}{c}<\\>\end{array}\right\}\frac{a}{b}\Leftarrow\left\{\begin{array}{l}c:d<\frac{m}{N}<a:b\\c:d>\frac{m+1}{N}>a:b\end{array}\right.$$

(ii) 由此可见，两者相等的充要条件就是它们和所有比数(rational number)皆有相同的大小关系

4) 定量平面几何基础论之重建:
相似三角形定理之辅证
矩形面积公式之辅证

5) 空间连续性 (continuity) 的认知与分析学(Analysis)之奠基与启蒙

3) 不可公度比a:b和c:d之间的大小或相等关系之明确界定：

(i) 设两者不相等，则其差是一个非零之定值，所以在N 足够大时, 其差大于$1/N$. 因此, $c:d$不可能也夹逼于上述$\frac{m}{N}$和$\frac{m+1}{N}$ 之间，亦即有

$$c:d\left\{\begin{array}{c}<\\>\end{array}\right\}\frac{a}{b}\Leftarrow\left\{\begin{array}{l}c:d<\frac{m}{N}<a:b\\c:d>\frac{m+1}{N}>a:b\end{array}\right.$$

(ii) 由此可见，两者相等的充要条件就是它们和所有比数(rational number)皆有相同的大小关系

4) 定量平面几何基础论之重建:
相似三角形定理之辅证
矩形面积公式之辅证

5) 空间连续性 (continuity) 的认知与分析学(Analysis)之奠基与启蒙

3) 不可公度比a:b和c:d之间的大小或相等关系之明确界定:

(i) 设两者不相等，则其差是一个非零之定值，所以在N 足够大时，其差大于$1/N$. 因此，$c:d$不可能也夹逼于上述$\frac{m}{N}$和$\frac{m+1}{N}$ 之间，亦即有

$$c:d \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right\} \frac{a}{b} \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} c:d < \frac{m}{N} < a:b \\ c:d > \frac{m+1}{N} > a:b \end{array} \right.$$

(ii) 由此可见，两者相等的充要条件就是它们和所有比数(rational number)皆有相同的大小关系

4) 定量平面几何基础论之重建:
相似三角形定理之辅证
矩形面积公式之辅证

5) 空间连续性 (continuity) 的认知与分析学(Analysis)之奠基与启蒙

3) 不可公度比a:b和c:d之间的大小或相等关系之明确界定:

   (i) 设两者不相等，则其差是一个非零之定值，所以在N 足够大时，其差大于$1/N$. 因此，$c:d$不可能也夹逼于上述$\frac{m}{N}$和$\frac{m+1}{N}$ 之间，亦即有

$$c:d \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right\} \frac{a}{b} \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} c:d < \frac{m}{N} < a:b \\ c:d > \frac{m+1}{N} > a:b \end{array} \right.$$

   (ii) 由此可见，两者相等的充要条件就是它们和所有比数(rational number)皆有相同的大小关系

4) 定量平面几何基础论之重建:
   相似三角形定理之辅证
   矩形面积公式之辅证

5) 空间连续性 (continuity) 的认知与分析学(Analysis)之奠基与启蒙

(i) 地心论(实乃迷途)
(ii) 多方解释：Eudoxus，Apollonius of Perga
(iii) Hipparchus (190-120 B.C.) of Rhode Island
(iv) Ptolemy：Almagest

(i) 地心论(实乃迷途)
(ii) 多方解释：Eudoxus，Apollonius of Perga
(iii) Hipparchus (190-120 B.C.) of Rhode Island
(iv) Ptolemy：Almagest

(i) 地心论(实乃迷途)
(ii) 多方解释：Eudoxus，Apollonius of Perga
(iii) Hipparchus (190-120 B.C.) of Rhode Island
(iv) Ptolemy：Almagest

(i) 地心论(实乃迷途)
(ii) 多方解释: Eudoxus，Apollonius of Perga
(iii) Hipparchus (190-120 B.C.) of Rhode Island
(iv) Ptolemy：Almagest

- 天文学的文艺复兴 (Renaissance of Astronomy)和天文巨棒三接力
  1. Copernicus (1473-1543)：Renaissance of Aristarchus (310-230B.C.)的日心论述
  2. Tycho de Brahe (1546-1601)：廿年夜以继夜，力求精准的天文观测
  3. Kepler：Astronomia Nova. 廿年艰辛探索，千古之谜真相大白：

Kepler's laws of planets motions
面积律，椭圆律，周期律

(二)新天文学(Astronomia Nova)

- 天文学的文艺复兴 (Renaissance of Astronomy)和天文巨棒三接力
  1. Copernicus (1473-1543)：Renaissance of Aristarchus (310-230B.C.)的日心论述
  2. Tycho de Brahe (1546-1601)：廿年夜以继夜，力求精准的天文观测
  3. Kepler：Astronomia Nova. 廿年艰辛探索，千古之谜真相大白：

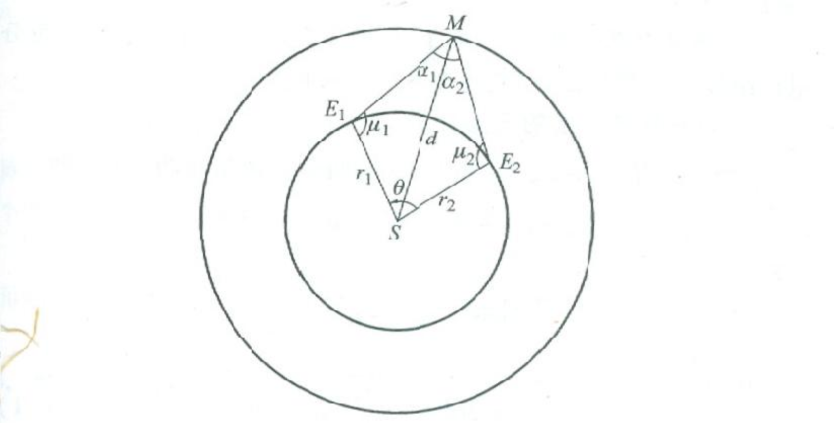
     Kepler's laws of planets motions
     面积律，椭圆律，周期律

- 天文学的文艺复兴 (Renaissance of Astronomy)和天文巨棒三接力
  1. Copernicus (1473-1543)：Renaissance of Aristarchus (310-230B.C.)的日心论述
  2. Tycho de Brahe (1546-1601)：廿年夜以继夜，力求精准的天文观测
  3. Kepler：Astronomia Nova. 廿年艰辛探索，千古之谜真相大白：

Kepler's laws of planets motions

面积律，椭圆律，周期律

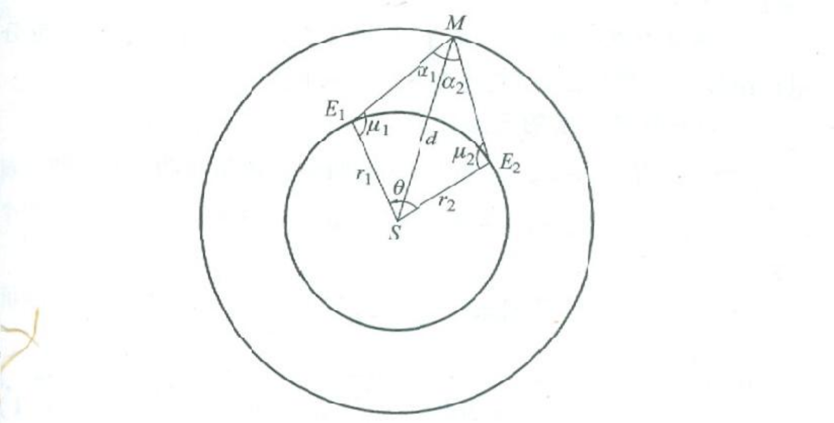
- 概述：
  (i) 启蒙与少年狂想曲(1595年7月19日)
  (ii) 天文巨棒三接力
  (iii) 太阳、地球、火星：三星互动之几何分析
  善用周期性与开氏量天术
  图：太阳S、火星M与地球位置E_1或E_2的示意图



- 概述：
  - (i) 启蒙与少年狂想曲(1595年7月19日)
  - (ii) 天文巨棒三接力
  - (iii) 太阳、地球、火星：三星互动之几何分析

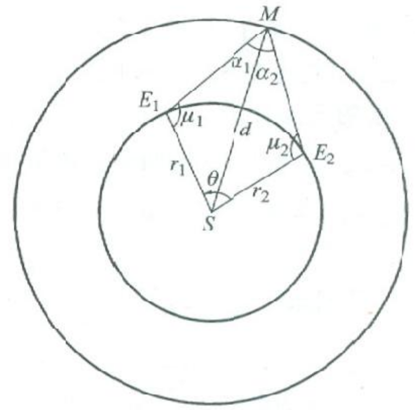
    善用周期性与开氏量天术

    图：太阳S、火星M与地球位置E_1或E_2的示意图



- 概述：
  (i) 启蒙与少年狂想曲(1595年7月19日)
  (ii) 天文巨棒三接力
  (iii) 太阳、地球、火星：三星互动之几何分析
  善用周期性与开氏量天术

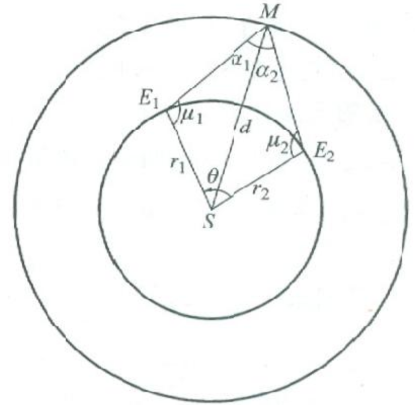
图：太阳S、火星M与地球位置E_1或E_2的示意图



- 概述:
  - (i) 启蒙与少年狂想曲(1595年7月19日)
  - (ii) 天文巨棒三接力
  - (iii) 太阳、地球、火星:三星互动之几何分析

    善用周期性与开氏量天术

    图:太阳S、火星M与地球位置E_1或E_2的示意图



(iv) 自知之明: 地球的面积律; 迈向新天文学的基础性重大突破

(v) 十年面壁终破壁, 又见椭圆:
火星椭圆律的发现

(vi) 再接再厉, 顺理成章:
Harmonica Mundi (1619)
廿年艰苦卓绝的奋斗
千古之谜终于真相大白

(iv) 自知之明：地球的面积律；迈向新天文学的基础性重大突破

(v) 十年面壁终破壁，又见椭圆：
火星椭圆律的发现

(vi) 再接再厉，顺理成章：
Harmonica Mundi (1619)
廿年艰苦卓绝的奋斗
千古之谜终于真相大白

(iv) 自知之明：地球的面积律；迈向新天文学的基础性重大突破

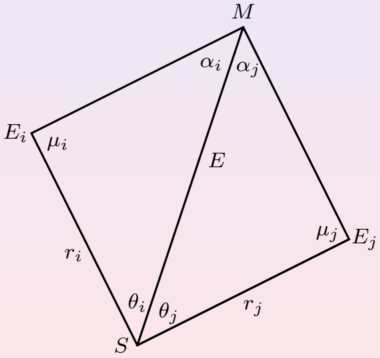
(v) 十年面壁终破壁，又见椭圆：
火星椭圆律的发现

(vi) 再接再厉，顺理成章:
Harmonica Mundi (1619)
廿年艰苦卓绝的奋斗
千古之谜终于真相大白

- 重访：师法其意，改弦更传，身历其境
  之一：地球面积律; 之二：地球椭圆律, etc.

$$\frac{r_j}{r_i} = \frac{\sin\alpha_j \sin\mu_i}{\sin\alpha_i \sin\mu_j}$$

$$\left(\frac{r_i}{r_j}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{\omega_j}{\omega_i}$$



- 由行星运行律到万有引力定律
- 数理分析，精益求精，至精至简，以简御繁，其精要在于下述四个基本命题之论证：
  - 其一：面积律 $\Leftrightarrow$ 作用力向心
  - 其二：面积律 + 椭圆律 $\Rightarrow$ 向心力和距离平方成反比
  - 其三：上述命题之逆命题
  - 其四：球形均匀薄壳的引力公式

历史的注记与重访

- 由行星运行律到万有引力定律
- 数理分析，精益求精，至精至简，以简御繁，其精要在于下述四个基本命题之论证：
  - 其一：面积律 $\Leftrightarrow$ 作用力向心
  - 其二：面积律 + 椭圆律 $\Rightarrow$ 向心力和距离平方成反比
  - 其三：上述命题之逆命题
  - 其四：球形均匀薄壳的引力公式

历史的注记与重访

- 由行星运行律到万有引力定律
- 数理分析，精益求精，至精至简，以简御繁，其精要在于下述四个基本命题之论证：
  - 其一：面积律 $\Leftrightarrow$ 作用力向心
  - 其二：面积律 + 椭圆律 $\Rightarrow$ 向心力和距离平方成反比
  - 其三：上述命题之逆命题
  - 其四：球形均匀薄壳的引力公式

历史的注记与重访

- 由行星运行律到万有引力定律
- 数理分析，精益求精，至精至简，以简御繁，其精要在于下述四个基本命题之论证：
  - 其一：面积律 $\Leftrightarrow$ 作用力向心
  - 其二：面积律 + 椭圆律 $\Rightarrow$ 向心力和距离平方成反比
  - 其三：上述命题之逆命题
  - 其四：球形均匀薄壳的引力公式

历史的注记与重访

- 由行星运行律到万有引力定律
- 数理分析，精益求精，至精至简，以简御繁，其精要在于下述四个基本命题之论证：
  - 其一：面积律 $\Leftrightarrow$ 作用力向心
  - 其二：面积律 $+$ 椭圆律 $\Rightarrow$ 向心力和距离平方成反比
  - 其三：上述命题之逆命题
  - 其四：球形均匀薄壳的引力公式

历史的注记与重访

- 由行星运行律到万有引力定律
- 数理分析，精益求精，至精至简，以简御繁，其精要在于下述四个基本命题之论证：
  - 其一：面积律 $\Leftrightarrow$ 作用力向心
  - 其二：面积律 + 椭圆律 $\Rightarrow$ 向心力和距离平方成反比
  - 其三：上述命题之逆命题
  - 其四：球形均匀薄壳的引力公式

历史的注记与重访

谢 谢!