立体几何学的现代论述——空间的几何不变量理论

1 平行、垂直与反射对称性

在定性和定量平面几何的研讨中，其至精至简在于平行、垂直与平面对于任给直线的反射对称，而等腰三角形和平面四边形的性质则是平面几何中简模精到 ，易用好用基本工具。

2 空间中的平行、垂直与反射对称性

在空间中有三种平行，即面面、面线和线线平行

$$\begin{cases} \pi_1 /\!/ \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing \text{或} \pi_1 = \pi_2 \left(\text{相重合}\right) \\ \pi /\!/ l \Leftrightarrow \pi \cap l = \varnothing \text{或} \pi \supset l \\ l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow l_1 \text{与} l_2 \text{共面，且} l_1 \cap l_2 = \varnothing \text{或} l_1 = l_2 \end{cases}$$

不难用平面中关于平行性的下述基本引理，即

“在平面π中过直线l之外，给定点P，存在唯一直线l_P，使$l \cap l_P = \varnothing$。”

进而推导下述空间平行性的基本引理:

其一：设$\pi_1 /\!/ \pi_2$，$\pi \cap \pi_1 = l_1$，$\pi \cap \pi_2 = l_2$，则$l_1 /\!/ l_2$

其二：过平面π之外一给定点P，存在唯一的平面π_P，$\pi \cap \pi_P = \varnothing$（以及$\pi_P$的理念做表）

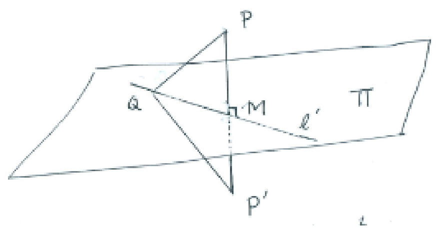
其三：设有各异的三个平面$\{\pi_i, 1 \le i \le 3\}$两两相交于一直线，令$l_i = \pi_j \cap \pi_k$，$(i, j, k) \square (1,2,3)$，则有$l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \begin{cases} \varnothing \\ \{P\} \end{cases}$。

前者三线两两平行，而后者则三线共交于P点。

由此即可推导基本引理：$l_1 /\!/ l_2, l_2 /\!/ l_3 \Rightarrow l_1 /\!/ l_3$

再者，在平面中一个基本事实是和相异两点$\{P, P'\}$等距的点所构成的点集B是线段$\overline{PP'}$的垂直平分线（此是乃是等腰三角形定理的直接推论。）它在空间中的自然推广是下述基本定理，即

定理 1：在空间中和相异两点$\{P, P'\}$等距的点构成的点集乃是线段$\overline{PP'}$的垂直平分面；它是一个 2-维平真子集；过$\overline{PP'}$的中点M，而且它和任给包含$\overline{PP'}$的平面π'的交集就是π'中$\overline{PP'}$的垂直平分线l'。



<u>推论 1</u>：当直线l和平面π中两条过M点的直线l_1'和l_2'正交于M点，则l和π中所有过M点的直线l'皆正交，【此时将以“$e\perp\pi$”记之，称之谓l和π正交。】

【基本理念作面】

例1. 过平面π中给定一点M，作直线l使得e和π正交于M点。

例2. 过平面π之外一点P，作直线P_1'和π正交。

推论 2 $\begin{array}{l} l_1\perp\pi, l_2\perp\pi \Rightarrow l_1 /\!/ l_2 \\ l\perp\pi_1, l\perp\pi_2 \Rightarrow \pi_1 /\!/ \pi_2 \end{array}$

<u>空间对于一个给定平面π的反射对称</u>

设π为空间中一个给定平面。由例 2 可见任给$p\notin\pi$皆有唯一的P'使得$\overline{PP'}$的垂直平分面就是π，令R_π为空间中的那个变换，它把π中之点固定不动而把π之外的点映射到上述P'点（亦即将$\{P,P'\}$两点互换）

<u>基本定理 1：</u>是空间V中的一个保长变换（isometry）

【证】设P_1,P_2是V中任给两点，我们不妨以简约符号P_1'和P_2'记号$R_\pi(P_1)$和$R_\pi(P_2)$。若$\{P_1,P_2\}$皆位于π之中，亦即$P_1'=P_1$，$P_2'=P_2$则显然有$\overline{P_1'P_2'}$和$\overline{P_1P_2}$等长。若$P_1'=P_1$而$P_2'=P_2$。则$\triangle P_1P_2P_2'$乃是等腰三角形。亦即$\overline{P_1'P_2'}$和$\overline{P_1P_2}$等长。再者，若$P_1\neq P_1', P_2\neq P_2'$，则分别由$\{P_2,P_2'\}$和$\{P_2,P_2'\}$两定直线$l_1$和$l_2$皆和$\pi$正交，所以$l_1 /\!/ l_2$，因此保长性乃是平面或直线（若$l_1=l_2$）的反射对称之保长性。

（二）<u>保长变换群与向量几何</u>

有反射对称$\{R_\pi\}$的保长性，易见它们的组合依然具有保长性，有鉴于直线段乃是空间的基本结构，而直线段的长度则是最为基本的几何量（geometric quantity）。在定量平面几何中其他种之几何量如面积、角度与皆可以用长度表述之，因此也都在<u>保长变换之下保持不变。</u>

空间的保长变换群：令$G(V)$是空间V上的所有保长变换的总体，亦即

$g \in G(V)$ 的充要条件就是" $g(P_1)g(P_2)$ 和 $\overline{P_1P_2}$ 恒为等长"

再者，把这种变换的组合定义为 $G(V)$ 中的乘法，即

$g_1g_2(P) := g_1(g_2(P))$， $\forall P \in V$

则 $g \in G(V)$ 构成一个群，称之为空间的保长变换群（the ioometry group of the space）

由上述基本定理 1,对于任给平面 π 的反射对称 R_π 乃是 $G(V)$ 中极为简单的元素，而由它们的组合（乘法）而得者，则是 $G(V)$ 之中的一个子群（subgroup）。其实，不难证明这个子群已是 $G(V)$ 本身（参看基本定理 2）亦即任给 $g \in G(V)$ 皆可用某些的组合而得到。在此，且让我们先来分析一下两个反射对称的组合平移（translation）与转轴（rotation）。

【例一】设 $\pi_1 // \pi_2$ 则 $R_{\pi_2} \bullet R_{\pi_1}$ 在 $\pi_1 = \pi_2$ 时使得 V 中没一点固定不动（亦即是 $G(V)$ 的单位元素）; 而在 $\pi_1 \cap \pi_2 = \varphi$ 时它把 V 中每点向 π_1, π_2 的共有垂直方向平行移动 $d(\pi_1, \pi_2)$ 之两倍。（如-1 所示）

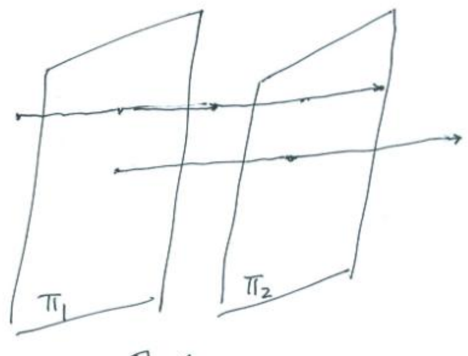


图-1

【例二】设 $\pi_1 \cap \pi_2 = l$，则 $R_{\pi_2} \bullet R_{\pi_1}$ 使得每一个和 l 正交的平面 π 中之点依然变换到 π 之内，而它在 π 中的变换则是一个两倍于 $\angle \pi_1, \pi_2$（亦即 $\angle \pi \cap \pi_1, \pi \cap \pi_2$）的旋转。

· 正交标架常和 $G(V)$ 的单可递性（the bundle of orthogonal

• 平移子群（translation subgroup）
• 正交群（orthogonal group）

引理：平移的组合还是平移，而且$\tau_1 \bullet \tau_2 = \tau_2 \bullet \tau_1$

【它是平行四边形定理的直接推论】

基本定理 2：令$\Gamma(V)$是V上所有正交标架所成的集合，Γ_p是（位于P点）点的正交标架所成的子集，则

（1）$G(V)$在$\Gamma(V)$上的作用是单可递的，亦即对于两个任给的正交标架F_1和F_2，存在唯一的$g \in G(V)$使得 g（F_1)=F_2。

（2）所有平移组成$G(V)$的一个<u>可换正规子群</u>（commutative normal subgroup）$T(V)$，V上的平移群，它在V上的作用是单可递的。亦即对于V上任给两点$\{P, P'\}$，存在唯一的平移τ使得$\tau(P) = P'$。

（3）$G(V)$之中所有使得给定点O固定不动的元素组成一个子群G，称之为O点的（stability subgroup），

$G_0 = \{g \in G(V); g(0) = 0\}$

它在Γ_p上的作用也是单可递的，再者，易见

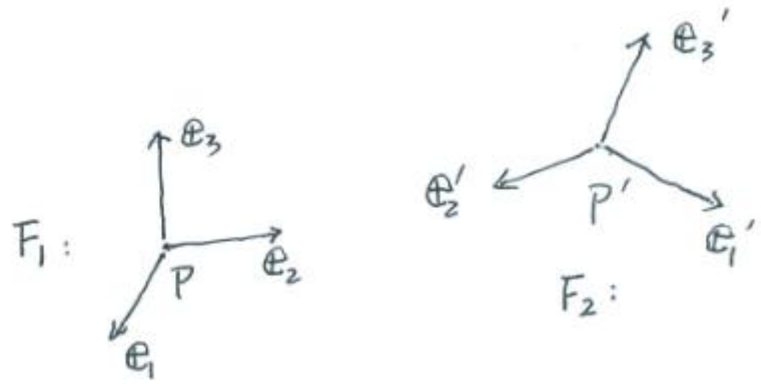
$gG_0g^{-1} = G_p, P = g(0)$

（4）上述三点可以用下述图解总结之：

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r] & G(V) \arrow[r] & O(3) \\
& G_p \arrow[u] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}_p \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}(V) \arrow[d] \\
P \arrow[r, phantom, "\in"] & V
\end{tikzcd}$$

（5）任给$g \in G(V)$都可以表成至多四个反射对称之组合。



· 向量代数与空间结构的系统代数化

为了叙述之简便，我们将以小写粗体拉丁字母$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{u},\vec{v}$等表示平移，改称之为位移向量（dioplacement vector）而且以$|\vec{a}|$表示其长度，$\angle\vec{a},\vec{b}$表示由$\vec{a}$到$\vec{b}$的“角度”，再者，因为位移的组合是可换的，将改用$\vec{a}+\vec{b}$表示它们的组合。由此可见，平行四边形定理的代数化表述就是

1）加法交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

很自然地，我们可用$n\bullet\vec{a}$表示n个$\vec{a}$的连相加，则有

$n(\vec{a}+\vec{b})=n\bullet\vec{a}+n\bullet\vec{b}$

再者，以$\frac{1}{n}\bullet\vec{a}$记号$n\bullet\vec{x}=\vec{a}$之唯一解，则上述分配律又可以推广到比数倍，

即$\frac{m}{n}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{m}{n}\vec{a}+\frac{m}{n}\vec{b}$，然后再用连续性，还可以定义实数倍$\lambda\bullet\vec{a}$，

而且也满足倍积分配律：

2）$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\bullet\vec{a}+\lambda\bullet\vec{b}$

就其实就是相似三角形定理的代数化表述

接着让我们研讨另一定量几何基本公式：勾股定理，是否也有具简单到精的代数化表述

首先，易见有

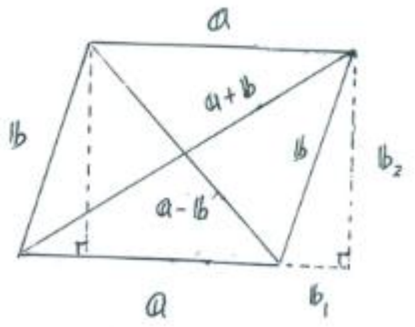
$$\angle(\vec{a},\vec{b})=\begin{cases}0\\ \dfrac{\pi}{2}\text{时}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\begin{cases}(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2\\ |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\\ (|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2\end{cases}\\ \pi\end{cases}$$

（勾股定理）

不难想到，上述三者可以用下述广义勾股定理统一。

广义勾股定理：$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$

【证明】:



如上图所示，可用垂直投影把$\vec{b}$分解为$\vec{b_1}+\vec{b_2}$，其中$\vec{b_1}$和$\vec{a}$同向或方向，而$\vec{b_2}$则和$\vec{a}$垂直，由此易见

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}+\vec{b}_1|^2+|\vec{b}_2|^2$$
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}_1|^2+|\vec{b}_2|^2$$
$$\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}_1|^2)+|\vec{b}_2|^2$$
$$=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$$

在此，自然还会想问，是否还可以把上述对于任给两个向量$\{\vec{a},\vec{b}\}$的恒等式推广成对于任给三个向量$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$皆普遍成立的恒等式呢？

稍加分析，一个值得一试者是

（★）$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{b}+\vec{c}\right|^2-\left|\vec{c}+\vec{a}\right|^2+\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2=0$

其实，上述恒等式可以证之如下，即变化运用广义勾股即有：

$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2+\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|^2=2\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2$ ①

$\left|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right|^2+\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|^2=2\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}-\vec{c}\right|^2$ ②

$\left|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right|^2+\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2=2\left|\vec{a}+\vec{c}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2$ ③

① +③-②即得

$$2\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2 = 2\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}+\vec{c}\right|^2 - 2\left|\vec{b}-\vec{c}\right|^2 + 2\left|\vec{c}\right|^2 + 2\left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|^2 =$$

$$2(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{b}+\vec{c}\right|^2 + 2\left|\vec{a}+\vec{c}\right|^2) - 2(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2)$$

当然，我们还可以继续探索它的更多向量元的恒等式。但是，在此适可而止，改弦更张尚可发现更富有几何内涵的至精至简，即引入$\{\vec{a}, \vec{b}\}$的下述二元函数

$$f(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2}\{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\}$$

则（★）式所展现者就是 $f(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) - f(\vec{a},\vec{b}) - f(\vec{a},\vec{c}) = 0$

亦即 $f(\vec{a},\vec{b})$ 乃是 $\vec{a},\vec{b}$ 的双线性函数。

3）<u>向量内积</u>：若改用 $\vec{a},\vec{b}$ 表述 $f(\vec{a},\vec{b})$，则（★）式就是

$\vec{a}\bullet(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\bullet\vec{b} + \vec{a}\bullet\vec{c}$ （内积分配律）

它就是勾股定理的推广和优化的代数形式！

向量内积的几何意义：

如右图所示，$\vec{b_1}$ 为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向的垂直投影（orthogonal projection），即有 $\vec{b} = \vec{b_1} + \overrightarrow{b_2}$，

$\vec{a}\bullet\overrightarrow{b_2} = 0$ 而 $\vec{b_1}$ 和 $\vec{a}$ 共线（亦即线性相关）。则有

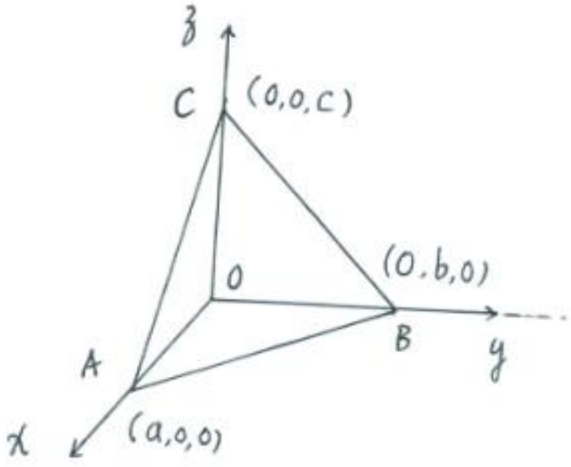
$\vec{a}\bullet\vec{b} = \vec{a}\bullet(\vec{b_1}+\overrightarrow{b_2}) = \vec{a}\bullet\vec{b_1} = 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha, \alpha = \angle(\vec{a},\vec{b})$

3）面积的勾股与向量外积（out product of vector）

在古希腊几何学中，下述面积的勾股（毕氏公式）是另外一个失之交臂的重要定理：

面积的勾股：空间中任给一个三角形的面积之平方恒等于它在三个互相垂直的平面（例如一个笛式坐标式的三个坐标面）上的垂直投影的面积的平方和。

例如：



$$\left|\Delta ABC\right|^2 = (\frac{1}{2}ab)^2 + (\frac{1}{2}bc)^2 + (\frac{1}{2}ca)^2$$

（此事应该可以被 Archimedeo 所发现也可能被秦九韶发现，同学不妨用“海伦公式”验证之）

平面的定向（orientation）和平行四边形的面积的有向面积（oriented area）

在平面解析几何中，有下述定向平行四边形的有号面积公式，即

$$A(\vec{a},\vec{b}) = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\beta-\alpha) = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|(\sin\beta\cos a - \sin a\cos\beta)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}\bullet\overrightarrow{e_x} & \vec{b}\bullet\overrightarrow{e_x} \\ \vec{a}\bullet\overrightarrow{e_y} & \vec{b}\bullet\overrightarrow{e_y} \end{vmatrix}, A(\vec{b},\vec{a}) = -A(\vec{a},\vec{b})$$

<u>定向、有号面积</u>之所以远优于不定向、恒正面积在于前者又是$\{\vec{a},\vec{b}\}$的双线性函数，即

$$A(\lambda\bullet\vec{a}) = \lambda A(\vec{a},\vec{b})$$
$$A(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = A(\vec{a},\vec{b}) + A(\vec{a},\vec{c})$$

前段关于长度的勾股定理和向量内积的讨论启示我们也可以把$\{\vec{a},\vec{b}\}$两张的平行四边形$/\!/\left(\vec{a},\vec{b}\right)$想成二维的基本几何事物，然后妥加$/\!/\left(\vec{a},\vec{b}\right)$定义和$/\!/\left(\vec{c},\vec{d}\right)$的另一种“内积”，长话短说，下述定义

$$/\!/\left(\vec{a},\vec{b}\right)\bullet/\!/\left(\vec{c},\vec{d}\right) = A(\vec{a},\vec{b})\bullet A(\overrightarrow{c_1},\overrightarrow{d_1})$$

其中$\overrightarrow{c_1},\overrightarrow{d_1}$分别是$\vec{c},\vec{d}$在$(\vec{a},\vec{b})$两张如平面上的垂直投影乃是自然的选择。这种自然的定义可赋予者就是下属建模精到的面积之内积公式，即

定理 2

$$/\!/\left(\vec{a},\vec{b}\right)\bullet /\!/\left(\vec{c},\vec{d}\right)=\begin{vmatrix}\vec{a}\bullet\vec{c} & \vec{b}\bullet\vec{c}\\ \vec{a}\bullet\overrightarrow{d_y} & \vec{b}\bullet\overrightarrow{d_y}\end{vmatrix}$$

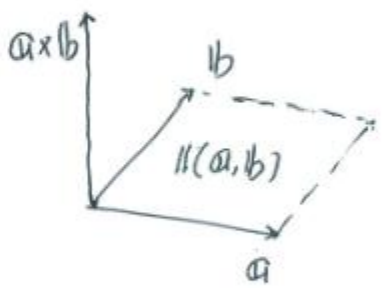
【证明】：$/\!/\left(\vec{a},\vec{b}\right)\bullet /\!/\left(\vec{c},\vec{d}\right)=A(\vec{a},\vec{b})\bullet A(\overrightarrow{c_1},\overrightarrow{d_1})$

$$=\begin{vmatrix}\vec{a}\bullet\overrightarrow{e_x} & \vec{b}\bullet\overrightarrow{e_x}\\ \vec{a}\bullet\overrightarrow{e_y} & \vec{b}\bullet\overrightarrow{e_y}\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}\vec{c}\bullet\overrightarrow{e_x} & \vec{d}\bullet\overrightarrow{e_x}\\ \vec{c}\bullet\overrightarrow{e_y} & \vec{d}\bullet\overrightarrow{e_y}\end{vmatrix}$$

$$\overset{1}{=}\begin{vmatrix}\vec{a}\bullet\overrightarrow{c_1} & \vec{b}\bullet\overrightarrow{c_1}\\ \vec{a}\bullet\overrightarrow{d_1} & \vec{b}\bullet\overrightarrow{d_1}\end{vmatrix}\overset{2}{=}\begin{vmatrix}\vec{a}\bullet\vec{c} & \vec{b}\bullet\vec{c}\\ \vec{a}\bullet\vec{d} & \vec{b}\bullet\vec{d}\end{vmatrix}$$

等式（1）用了二阶行列式乘法公式，而等式（2）则用到 $\vec{a}\bullet\vec{c}=\vec{a}\bullet\overrightarrow{c_1}+\vec{a}\bullet\overrightarrow{c_2}$，$\vec{b}\bullet\vec{c}=\vec{b}\bullet\overrightarrow{c_1}$，$\vec{a}\bullet\vec{d}=\vec{a}\bullet\overrightarrow{d_1}$ 和 $\vec{b}\bullet\vec{d}=\vec{b}\bullet\overrightarrow{d_1}$，因为 $\overrightarrow{c_2}$ 和 $\overrightarrow{d_2}$ 都和皆 $\vec{a},\vec{b}$ 皆垂直。

向量外积：在三维的空间 V 中，直线和它垂直的平面之间具有自然的对偶关系（duality），我们可以用它来把 $/\!/\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ 转换成一个长度等于其面积而方向是其正法向量者来表述之，亦即下面所示的 $\vec{a}\times\vec{b}$ 定义为 $\vec{a},\vec{b}$ 的外积。



{a, b, a×b} 為
右手型.
|a×b| = 之面積,

而前述定理 2 则可改写为

$$A(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\bullet\vec{c} & \vec{b}\bullet\vec{c}\\ \vec{a}\bullet\vec{d} & \vec{b}\bullet\vec{d}\end{vmatrix}$$ （Lagrange’s 公式）

小结：

（1）<u>向量代数与向量几何</u>

（2）<u>四元体：时空的代数（Hamilton）</u>

$$R \times V = \{(t, \vec{a}), t \in R, \vec{a} \in V\}$$

$$(t, \vec{a}) + (t', \vec{b}) = (t + t', \vec{a} + \vec{b})$$

$$(t, \vec{a}) \bullet (t', \vec{b}) = (tt' - \vec{a} \bullet \vec{b}, t\vec{b} + t\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$$

（三）空间的几何不变量理论

1）全局观点

・几何事物（geometric objet）和他们的几何量（geometric quantities），例如一个三角形的三边边长，三内角之角度，面积，等等定量几何学所研讨者就是这些几何量之间的函数关系（functional relation），例如正弦定律，余弦定律，面积公式等等。

・在解析几何学中，所采取的途径是取用一个坐标系使得空间每点 P 皆由其（ x, y, z ）-坐标，进而造成全面的量化。其实， P 点的(x, y, z ）-坐标就是 P 点和选定正交标架 $D(\sigma) = (\vec{a} \times \vec{b})?\vec{c} = \ \vec{a'} \times \vec{b'} \quad \vec{c} = |\vec{a'}||\vec{b'}| \quad c = \quad b \quad a \quad c$

$F_0 = (O, e_x, e_y, e_z)$之间的定量关系,亦即

$$x = \overrightarrow{OP} \bullet e_x, y = \overrightarrow{OP} \bullet e_y, z = \overrightarrow{OP} \bullet e_z$$

这种采用坐标化来造成全空间各点之量化看来整齐划一，一蹴而就，其实此法附带有“非本质性”( )的沉重包袱，因为坐标系的选取显然并非本质性的，总之，采用坐标解析法研讨几何，必然引进大量<u>非本质</u>性的量，只有那些和坐标选取无关的量才具有本质性的几何意义，所以每次都必须研究其坐标变换，下功夫提炼对于所要研究的几何事物在坐标化两者的不变量（invariants）此事在解析几何的初期已业充分体认。例如当年用来研究圆锥曲线（conic ）时，他们的方程式是一个（x，y）的二次方程式，即

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

但是$(A:B:C:D:E)$本身非本质，所以必须研究这些系数比在坐标变化下的不变量，结果发现

$$H = A + C, \delta = B^2 - AC \text{ 和 } \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

乃是其基本不变量。

・由基本定理 2 可见，$G(V)$ 中每个元素 g 所表述者乃是 $\Gamma(V)$ 中的<u>两个正交标价之间的相对性</u>。由此可见，$G(V)$ 所体现者其实就是所有坐标变换的实质之总体，换言之，在的作用之下保持不变者也就是那种在所有坐标变换之下保持不变之量，称之为几何不变量（geometric invariants）

再者，上述简短的论述也具体解释了下述哲理性的信念：因为长度乃是最为基本的几何量，所以所有在保长变换群的作用之下保持不变者皆为根植于长度的

几何量，亦即是具有本质性几何意义之量。概括地说，立体几何学所研究者就是各种各样几何事物或问题所涉及的$G(V)$不变量之间的函数关系，这就是空间的几何不变量理论的所研讨的课题。

向量代数与几何不变量理论：

向量代数赋予平移群十分简单精到的代数运算，倍积、内积和外积；各有其简明精要的几何内涵和运算律，特别是三种乘法的分配律，其本质乃是度量几何中重要的基本定理，而且是代数上最为好用易算的线性运算（linear operation）归根究底，向量代数完美地完成了空间基本性质的全面代数化，是空间本质的至精至简，有较好算得代数体系，现在再用上述几何不变量理论的观点，来分析向量代数的本质，用法和用场。

$T(V)\subset G(V)$是一个可换正规子群（commutative normal subgroup）；它在$G(V)$的共轭内自同构的作用之下，乃是三维正交群的一个线性表示，而上述向量代数的四种运算个别都是$SO(3)$-协变的，由此可见，对于给定的几何事物或问题，一方面可以用所涉及的位移向量加以表述，然后再用向量代数来分析其中所蕴含的数量表示，他们必然是$SO(3)$-不变者，亦即是定向的几何不变量。这就是向量几何的研讨方式。可以说，向量代数本身的$SO(3)$-协变性其实就是平移子群$T(V)$的共轭不变形的精要所在，是研究几何不变量理论的主力军。

2）球面几何，正交群的几何不变量理论

对于空间中取定一点O，中使得点固定不动的定点子群G_0是一个正交子群（$G_0\cong O(3)$），把的作用局限到G_0，它把全空间分解成以O为球心的同心球面，它们对于一个以O点位原点的坐标系方程式就是

$$S^2(R): x^2+y^2+z^2=R^2(0\le R\le\infty)$$

半径为 R 的球面乃是半径为 1 的单位球面$S^2(1)$的 R-倍（放大或缩小）他们的几何都很容易归结到$S^2(1)$上的几何来研讨，所以球面几何的研究通常总是正规化为单位球面的几何。再者，$S^2(1)$上的保长变换群就是正交群，所以球面几何也就是正交群的几何不变量理论。

（单位）球面的基本性质：

① 对称性：对于一个过球心 0 的平面，$R_\pi\in G_0$它局限于$S^2(1)$的变换使得$S^2(1)\cap\pi$这个大圆每点固定不动，可以看做$S^2(1)$上的一个反射对称。

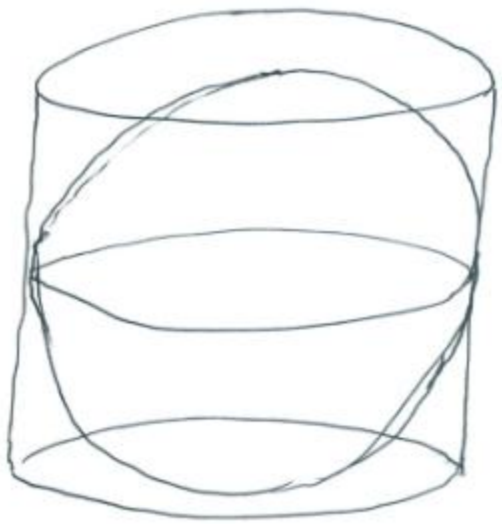
（reflection symmetry of $S^2(1)$）

球面与平面的几何性质大同小异，例如大圆相当于直线，具有同样的分割性与对称性，其小异在于下述两点，即

② 两的两个大圆 $S^2(1)\cap\pi_1$ 和 $S^2(1)\cap\pi_2$ 相交于对顶点之两点，即

$S^2(1)\cap\pi_1\cap\pi_2, \pi_1\cap\pi_2$ 是过 O 点的一条直线。

③ 单位球面总面积等于（Archimedeo 定理），这是他最引以为豪的贡献，其证如下面所示，依他的遗嘱刻在其墓碑之上。



球面三角形的几何不变量理论：球面三角学（Spherical？？？）

• 古希腊的几何学家（往往也是天文学家）充分认识到球面几何在定量天文学上的基本重要性，所以他们先致力于球面三角学的研究。【他们对于量天的热诚远远超越侧地的关注】

• 在十八世纪，由于航海和大地测量的需求，球面三角学的研究慰为风尚，Euler，Gauss 等数学泰斗都也是其中热心份子。

为了在观点和处理方法上的和谐与统一，我们在此将改用向量代数来研究球面三角，以及采取三个单位向量的几何不变量理论的研讨方式。

符号与定义

设 $\{A,B,C\}$ 是（单位）球面上不含对顶的任给三点，我们将以

$\sigma(A,B,C)$和$\Delta\{A,B,C\}$ 分别表示以其为顶点的球面 Δ 和平面 Δ，再者，

以 $\tau(\sigma,1)$ 和$T(\sigma)$分别表示以$O(A,B,C)$为其顶点的四面体和立体角锥

Γ（σ）之内位于的三个切面之内侧之点，所构成的多面体，即

$T(\sigma)=\{X\in\Gamma$（σ）$;\overrightarrow{OX}$?$\overrightarrow{OA}\leq$,$\overrightarrow{OX}$ $\overrightarrow{O}$ $\leq$ $\overrightarrow{OX}$ $\overrightarrow{OC}\leq$ 1$\}$

如下面所示，我们将采用下列符号体系：

用$\{A,B,C\}$与$\{a.b,c\}$分别表示$\sigma(A,B,C)$的三个内角与三个对边弧长，

以$\vec{a}=\overline{OA},\vec{b}=\overline{OB},\vec{c}=\overline{OC}$表示$A,B,C$的位置向量，则有

$$\cos\vec{a}=\overrightarrow{b\bullet c},\cos\vec{b}=\overrightarrow{c\bullet a},\cos\vec{c}=\overrightarrow{a\bullet b},$$
$$D(\sigma)=\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c})$$

② 令M与$\overline{M}$分别是$\sigma(A,B,C)$和$\Delta\{A,B,C\}$的外心，$\{\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3\}$是与$\sigma(A,B,C)$和$\Delta\{A,B,C$的外心分解在$M$与$\overline{M}$与的中心角，$\{d_1,\ d_2,\ d_3\}$是$M$到$\sigma$的三边的有号距离，$\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\}$是它在三边的定向夹角。

③ 我们将用$|\sigma|$与$|\Delta|$与分别表示$\sigma(A,B,C)$和$\Delta\{A,B,C\}$的面积，以$\sigma_A,\ \sigma_B,\ \sigma_C$分别表示$\tau(\sigma,1)$在其顶点$\{A,B,C\}$的立体角锥的球面$\Delta$，$R$与$\overline{R}$与表示$\sigma(A,B,C)$和$\Delta\{A,B,C\}$的外径。

关于上述$\sigma(A,B,C)$，$\Delta(A,B,C)$，$\tau(\sigma,1)$和$T(\sigma)$的诸多常用几何不变量，具有下述系列基本公式，构成三个单位向量$\{a.b,c\}$的几何不变量之基础理论。

$D(\sigma)=\sin a\sin b\sin c$，etc（球面正弦律）

其一：$\sin a\sin b\cos c=\cos c-\cos a\cos b$，etc（球面余弦律）

$|\sigma|=A+B+C-\pi$（Archimedes定理的局部化）

【证明】：令$\vec{a}$与$\vec{b}$分别是$\vec{a},\vec{b}$在$\vec{c}$的垂直面上的垂直投影亦即

$$\overrightarrow{a'}=\vec{a}-(\vec{a}\bullet\vec{c})\vec{c},\overrightarrow{b'}=\vec{b}-(\vec{b}\times\vec{c})\vec{c}$$

则有

$$D(\sigma)=(\vec{a}\times\vec{b})?\vec{c}=\ \overrightarrow{a'}\times\overrightarrow{b'}\quad\vec{c}=|\overrightarrow{a'}||\overrightarrow{b'}|\quad c=\quad b\quad a\quad c$$

再者，令$A'B'C'$分别是A,B,C的对顶角，由 Archimedes 定理的初步局部化，即有（参看下图）

$$|\sigma(ABC)|+|\sigma(ABC')|=2C,etc$$

上述三式相加，再用$|\sigma(A'B'C')|=|\sigma(ABC)|$

即得 $2A+2B+2C=2\pi+2|\sigma(ABC)|$

亦即 $|\sigma|=A+B+C-\pi$

图

【证】: 从几何直观来看，上述面积公式可以说业已极为精简，毋需他求，但是从不变量的研讨上，往往并非合用，好用，所以很有必要把上述三式结合起来推导下述面积公式，即

$$\tan\frac{|\sigma|}{2}=\frac{D}{u}=\frac{\sin C}{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos C}.edc$$

$(u=1+\cos a+\cos b+\cos c)$

【证明】用正、余弦律和代数简化，可得

$$\sin|\sigma|=-\sin(A+B+C)=\frac{2uD}{u^2+D^2}$$

$$\cos|\sigma|=\frac{u^2-D^2}{u^2+D^2}$$

$$\tan\frac{|\sigma|}{2}=\frac{\sin|\sigma|}{1+\cos|\sigma|}=\frac{D}{u}$$

再用正余弦律，又可得 $\frac{D}{u}=\frac{\sin a\sin b\sin c}{(1+\cos a)(1+\cos b)+\sin a\sin b\sin c}=\frac{\sin c}{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos c}$

其二：$\begin{cases} D=6vol\tau(\sigma,1)=2|\Delta|\cos R,\overline{OM}=\cos R \\ \text{令}\bar{\mathrm{a}}=2\sin\frac{a}{2}.etc\text{为}\square\mathrm{ABC}\text{的边长，则有} \\ |\Delta|=\frac{\bar{\mathrm{a}}\bar{b}\bar{c}}{4\bar{R}},\bar{R}\text{是}\square ABC\text{的外径} \end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases} D=4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} \\ \tan^2 R=\frac{2}{D^2}(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c) \end{cases}$$

其三：σ_A的SSS. AAA. 与SAS分别是

$$\left\{\frac{1}{2}(\pi-b),\frac{1}{2}(\pi-c),\theta\right\}$$

$$\left\{A,\frac{\pi}{2}-d_2,\frac{\pi}{2}-d_3\right\} 与 \left\{\frac{1}{2}(\pi-b),\frac{1}{2}(\pi-c),A\right\}$$

而且有下述公式：

$$\cos\theta_1=\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos A$$

$$2\lambda_1=B+C-A=|\sigma|+\pi-2A$$

$$\tan\lambda_1=\frac{1}{D}(1+\cos a-\cos b-\cos c)$$

$$\tan d_1=\tan\lambda_1\sin\frac{a}{2}=\cos\theta_1\tan R_1$$

$$\gamma(\sigma):=|\sigma|+|\sigma_A|+|\sigma_B|+|\sigma_C|=\pi+2|\sigma|-2(d_1+d_2+d_3)$$

$$vol(E)=\frac{1}{6}\sin|\sigma|\{\frac{u}{8}-\tan^2 R\}$$

的体积公式的证明：

$$\overrightarrow{OV}=\frac{1}{D}(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}):=\vec{V}$$

$$VolT(\sigma)=\frac{1}{3}V\cdot\left\{\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{1+\vec{a}\cdot\vec{b}}+\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{1+\vec{b}\cdot\vec{c}}+\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{1+\vec{c}\cdot\vec{a}}\right\}$$

<u>球面Δ的保面积变换及应用范例</u>

Lexells 定理与 Lexells 变形

$$\theta=\frac{1}{2}\angle A_2OA_1,\angle BOA=\theta+\varphi,\angle AOC=\theta-\varphi$$

$$\cos\frac{1}{2}\overline{AB}=\cos\frac{b}{2}\cos\frac{\theta+\varphi}{2},\cos\frac{1}{2}\overline{AC}=\cos\frac{b}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

Dual of Lexells 变形